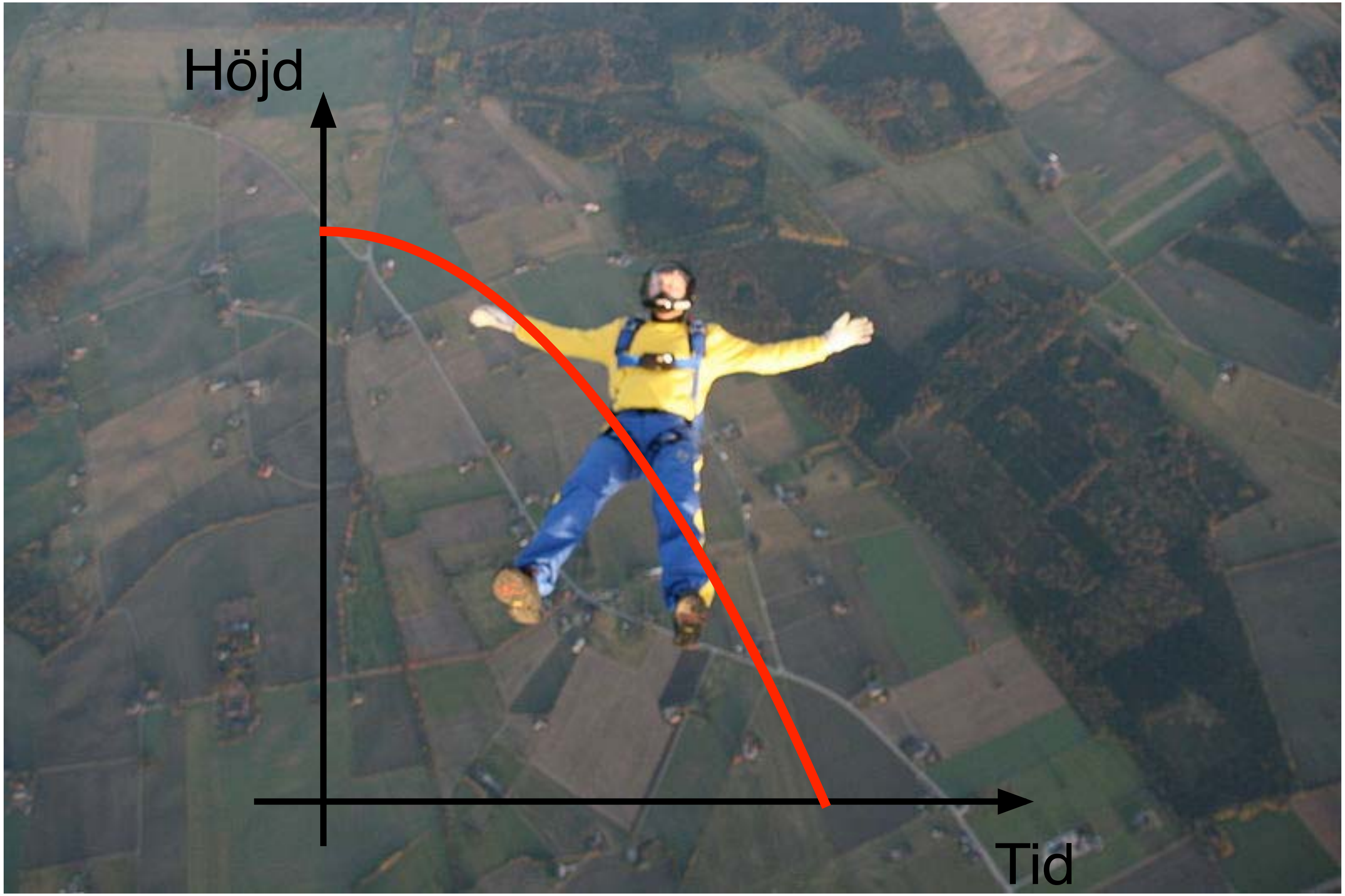
Andragradsfunktioner och -ekvationer



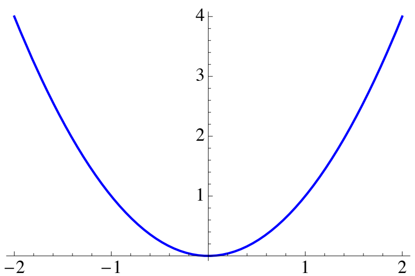
Höjden över markytan vid fritt fall följer en andragradsfunktion

Nikodemus Karlsson
Mars 2010

Några grundläggande andragradsfunktioner

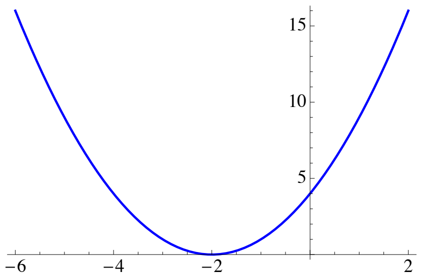
$$y = x^2$$

x	y
-1	1
0	0
1	1



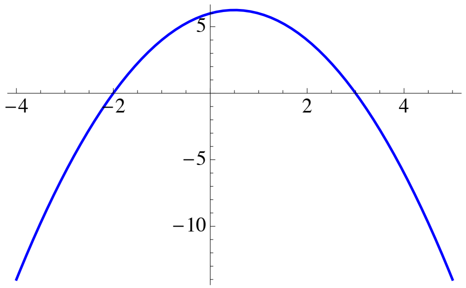
$$y = (x+2)^2$$

x	y
-5	9
0	4
1	9



$$y = (x+2)(3-x)$$

x	y
-2	0
0	6
3	0



Till alla andragradsfunktioner finns det par av x-värden som ger samma y-värde. Grafen till en andragradsfunktion har form enligt ovan. Denna formtyp kallas *parabel*.

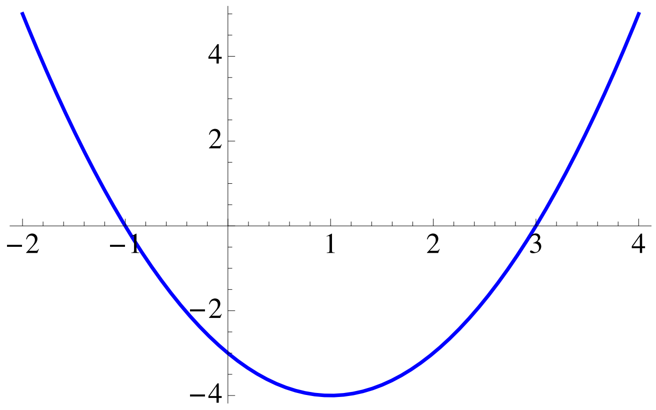
Olika sätt att skriva en andragradsfunktion

Uttrycket för en och samma andragradsfunktion kan representeras på tre olika sätt. Exempel på en och samma funktion:

$y = x^2 - 2x - 3$ Allmän form.

$y = (x - 3)(x + 1)$ Faktoriserad form, kan utläsa var grafen skär x-axeln.

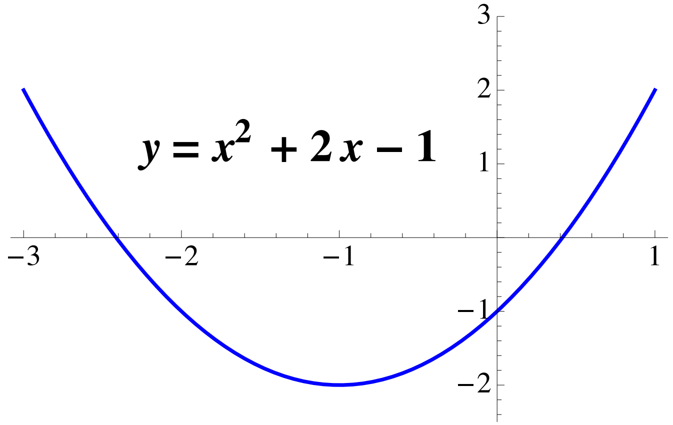
$y = (x - 1)^2 - 4$ Kvadratkompletterad form, kan utläsa symmetrilinjens ekvation.



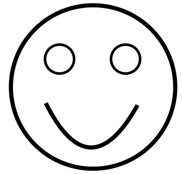
Vanligt förekommande uppgifter är att hitta nollställen eller funktionens maximum respektive minimum.

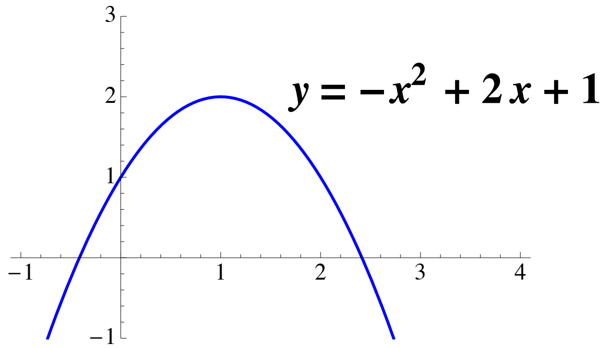
Metoden att skriva den allmänna formen på kvadratkompletterad form har givit oss den mycket användbara allmänna lösningsformeln som ger nollställen till andragradsfunktioner. När nollställena är kända kan funktionen faktoriseras!

Några begrepp rörande grafer för andragradsfunktioner

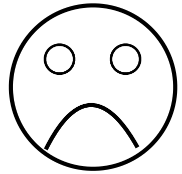


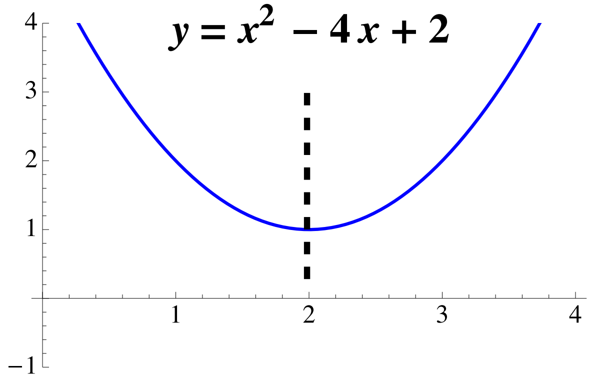
Funktionen som hör till denna graf har ett **minimum** vid y = -2. Andragradsfunktioner med **positiv** x^2-term ger minimum.





Funktionen som hör till denna graf har ett **maximum** vid y = 2. Andragradsfunktioner med **negativ** x^2-term ger maximum.





Symmetrilinjen till en graf går genom dess min- eller maxpunkt.

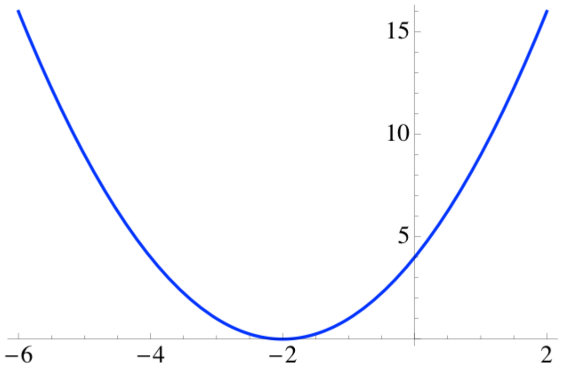
I detta fall är symmetrilinjens ekvation $x = 2$.

Denna graf hör till andragradsfunktionen $y = (x-2)^2 + 2$

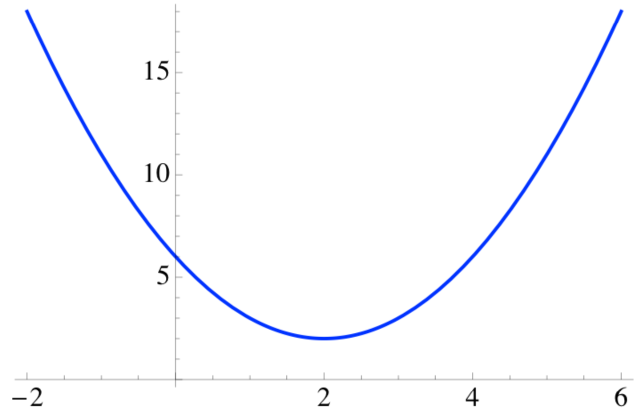
Med kvadratkomplettering erhålls enkelt symmetrilinjens ekvation, och man kan ta reda på funktionens maximum eller minimum.

Läget på grafen till en andragradsfunktion

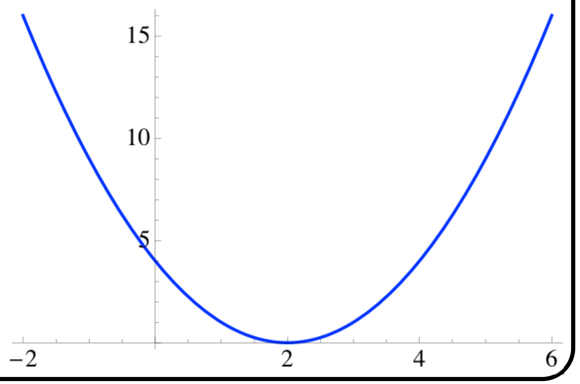
$y = (x+2)^2$



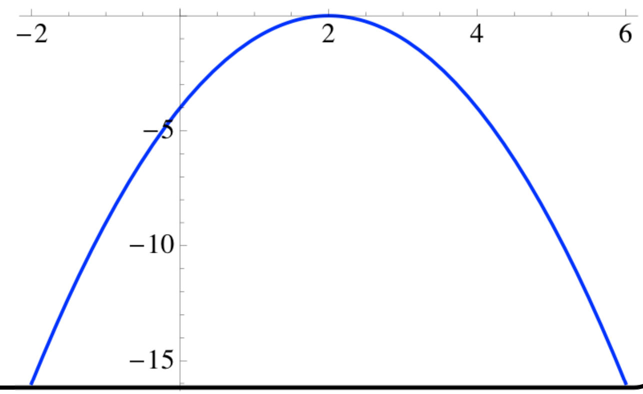
$y = (x-2)^2 + 2$



$y = (x-2)^2$



$y = -(x-2)^2$



När funktionen är representerad i kvadratkompletterad form, syns att grafens läge följer ett givet mönster som kan läsas ur funktionen.

Andragradsekvationer

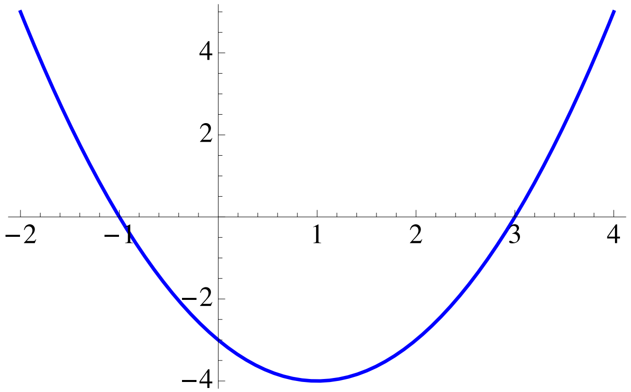
En andragradsekvation är en ekvation där det okända talet förekommer i kvadrerad form.

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \quad \text{eller} \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$ (samma ekvation, skriven på olika sätt)

(1) (2)

Ur (1) framgår att $x = 3$ eller $x = -1$ om ekvationen skall uppfyllas.

Ur (2) kan inte den slutsatsen dras direkt, t ex kan grafen till funktionen $y = x^2 - 4x + 2$ ritas:



Funktionens nollställen, skärningspunkterna med x-axeln, utgör lösningen till ekvationen.

Lösningsformel för andragradsekvationer

En andragradsekvation skriven på formen

$$x^2 + px + q = 0$$

har lösningarna (eller *rötterna*)

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

I svenska matematikböcker kallas denna formel populärt för ”pq-formeln”

För att en andragradsekvation skall vara lösbar med ”pq-formeln” måste den vara skriven på formen ovan. Har x^2 en faktor framför sig måste den divideras med alla termer i ekvationen (observera även om denna faktor är negativ). Har inte ekvationen talet noll i högerledet måste den skrivas om så att den får denna form.

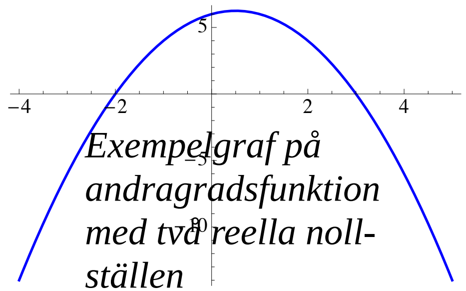
Överkurs i Matematik B

Känner vi till en andragradsekvations rötter kan den korresponderande funktionen faktoriseras. Säg t ex att en andragradsekvationen $f(x) = 0$ har rötterna x_1 och x_2. Då gäller att $f(x) = c(x - x_1)(x - x_2)$ där talet c bestäms ur en känd punkt som uppfyller ekvationen.

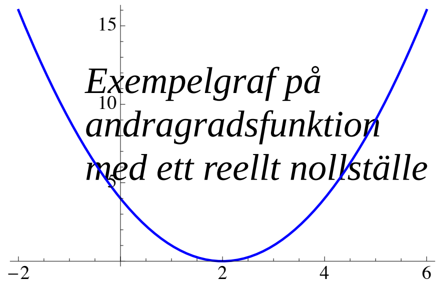
Lösningsfall för andragradsekvationer

Beroende av värdena på p och q i ekvationen $x^2 + px + q = 0$
kan tre olika lösningsfall erhållas:

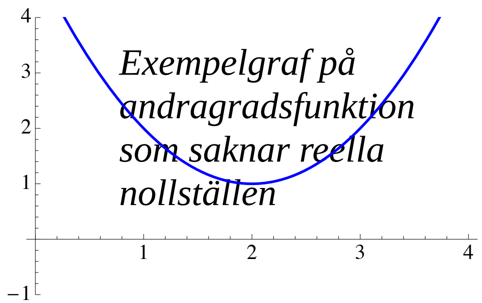
Ekvationen har två olika lösningar; svarar mot att funktionen $f(x) = x^2 + px + q$ har två reella nollställen:



Ekvationen har en lösning; svarar mot att funktionen $f(x) = x^2 + px + q$ har ett reellt nollställe:



Ekvationen saknar reella lösningar; svarar mot att funktionen $f(x) = x^2 + px + q$ saknar reella nollställen:



Samband mellan rötter, p och q: $x_1 + x_2 = -p$ och $x_1 \cdot x_2 = -q$