

# Kaströrelsens ekvationer

Olika sätt att representera kaströrelse matematiskt

Undervisningsmaterial i fysik, framtaget av Nikodemus Karlsson

### Kastvidd som funktion av hastighet

Vi vill beskriva kastvidden som funktion av hastigheten i en kaströrelse utan hänsyn taget till luftmotstånd. Observera att hastigheten anges såväl till storlek och riktning. Vi börjar med att ställa upp föremålets lägeskoordinater som funktion av tiden.

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \quad (1)$$

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad (2)$$

Givet att föremålet ska landa på samma nivå som det kastades från sätts  $y = 0$ , varpå  $t$  löses ut ur (1):

$$v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \text{ och } t_2 = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

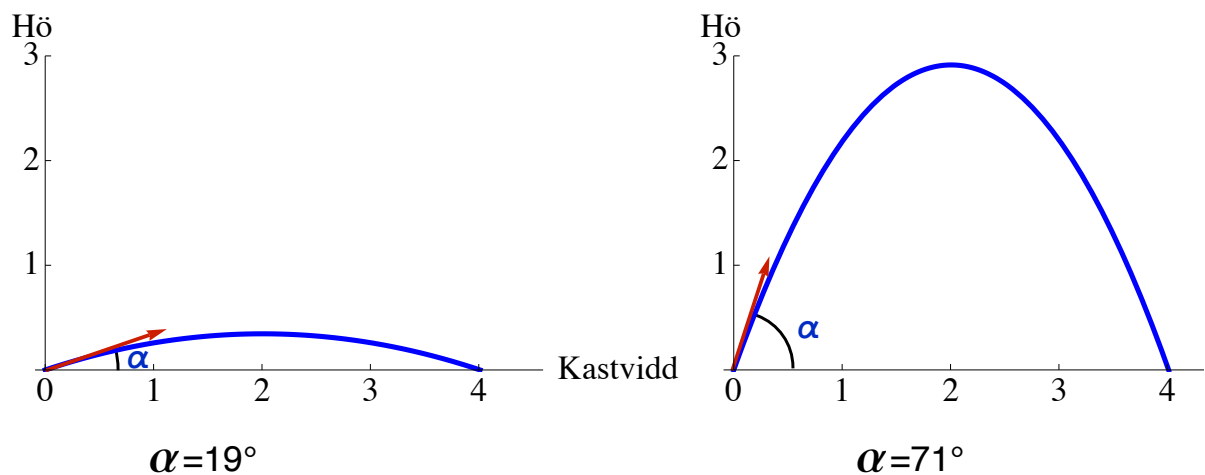
Att  $t_1 = 0$  är inte så konstigt, då föremålet uppenbarligen är på höjden 0 i kastögonblicket!

Sätt nu in  $t_2$  i ekvation (1) ovan:

$$x(\alpha) = \frac{2 v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha$$

vilket är vår sökta funktion.

Detta gäller då nivån för utkast och landning är densamma. Speciellt kan man se, beroende på att funktionen innehåller sinus för *dubbla* vinkeln, att samma kastvidd kan nås med två olika vinklar (utom i det fall då vinkeln är 45 grader). Se exempel i nedanstående bild.



Hur ska summan av de olika utkastvinklarna vara om kastvidden ska bli densamma? Gör en tabell för olika vinklar (gå från 0 till 90 grader), och se vilka vinkelpar som skapar samma kastvidd!

Hur kan sambandet modifieras för att få  $x$ -värdet för en annan nivå än den ursprungliga kastnivån? Svar: sätt  $y$  till den nivå som föremålet skall landa på. Positivt värde om detta läge ligger ovanför utkastnivån, negativt om det ligger under.

### Ett föremåls höjd som funktion av dess läge i $x$ -led

Vi vill beskriva läget på formen  $y=f(x)$  för ett föremål som befinner sig i en kaströrelse (med en given utgångshastighet). Alltså: givet en  $x$ -koordinat skall en  $y$ -koordinat beräknas, utan hänsyn taget till tidpunkten.

Vi börjar med att ställa upp föremålets lägeskoordinater som funktion av tiden.

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \quad (1)$$

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad (2)$$

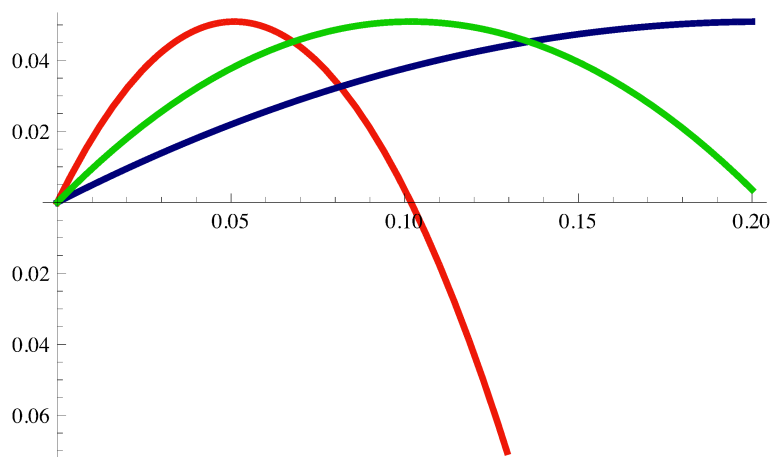
Vi löser ut  $t$  ur (1) och sätter in detta uttryck i (2).

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow y = \frac{v_0 \sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x - \frac{g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2}{2}$$

Detta uttryck förenklas.

$$y(x) = x \cdot \tan\alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} x^2 = x \cdot \tan\alpha - \frac{g}{2 v_x^2} x^2$$

Vi ser att detta är en andragsradsfunktion; man talar om kastparabler.



●  $y = x - 4,91 \frac{x^2}{1^2}$

●  $y = 0,5x - 4,91 \frac{x^2}{2^2}$

●  $y = 2x - 4,91 \frac{x^2}{0,5^2}$

Kastparabelns ekvation

$$y = \frac{v_{0y}}{v_x} x - 4,91 \frac{x^2}{v_x^2}$$

Som synes kan kastparabelns ekvation representeras på olika sätt. Hur kommer det sig?